УДК 519.853

© Р. Энхбат, Б. Барысбек

МАКСИМИЗАЦИЯ НОРМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОМПАКТЕ

В этой работе мы предлагаем методы нахождения ε-приближенного решения задачи максимизации нормы на произвольном компакте конечномерного пространства.

Ключевые слова: максимизация нормы, произвольный компакт.

© R. Ehkhbat, B. Barysbek

MAXIMIZING THE NORM ON AN ARBITRARY COMPACT

In this paper, we propose methods for finding ε-approximate solutions to maximize the norm on an arbitrary compact finite-dimensional space.

Keywords: maximizing the norm, arbitrary compact.

Введение

Задача максимизации нормы на некотором множестве является частным случаем общей задачи максимизации выпуклой функции, которая, как известно, относится к классу NP-hard задач. Методы отсечения для задачи выпуклой максимизации впервые были предложены Х.Туй в 1964 году [9]. До 1990-х годов основными методами решения задач этого класса были такие методы, как: метод отсечения [9], метод погружения [1] и метод ветвей и границ [3, 4, 5, 6]. Условия глобальной для этой задачи были сформулированы А.С. Стрекаловским в 1987 году [8]. Первый алгоритм, основанный на условиях глобальной оптимальности и понятии разрешающего набора, был предложен в работе [2, 7]. Этот алгоритм был предназначен для решения выпуклых задач на простых множествах, таких как: параллелепипед, шар и симплекс. В этой работе мы обсуждаем возможность нахождения ε-приближенного решения задачи максимизации нормы на невыпуклом компакте.

1. Аппроксимация линии уровня функции и её свойства

Рассматривается задача

$$\|x\| \to \max, \quad x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где D – произвольный компакт.

Пусть даны числа $z > 0$ и $\delta \le z\sqrt{2}$. Обозначим

$$U(z) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| = z \right\}.$$

Рассмотрим на сфере $U(z)$ сеть $A(z)$

$$A(z)=\left\{y^1,\ldots,y^N \mid \| y^i \|= z, i=1,\ldots,N\right\}, N\geq 2n\ .$$

обладающую следующими свойствами:

1) $\forall i=1,...,N\ ;\ \delta=\delta_i \triangleq \min\left\{\| y^i-y^j \| \mid j\neq i\right\}$.

2) $\forall x\in U(z),\ \exists \vartheta^1,\vartheta^2,...,\vartheta^n\in A(z)$:

$$\vartheta^i=\vartheta^i(x),\ \left\|\vartheta^i-\vartheta^j\right\|=\delta,\ x\in B\left(\vartheta^i,\delta\right),\ i,j=1,...,n\ ,$$

где $\vartheta^k=y^{i_k}$:

$$B(\vartheta^k,\delta)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \| x-\vartheta^k \|\leq\delta\right\},\ k=1,...,n\ .$$

Аппроксимацию $A(z)$ назовём δ-сетью.

Далее, семейство точек $\left\{\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n\right\}\subset A(z)$, определённое свойством 2) и зависящее от x, обозначим через $A(x)$. Из определения же вытекает единственность такого семейства.

Покажем, что

$$\langle\vartheta^i,\vartheta^j\rangle=(2z^2-\delta^2)/2, i\neq j, i,j=1,\ldots,n\ . \tag{2}$$

Действительно, поскольку $\| \vartheta^i-\vartheta^j \|=\delta$, то

$$\| \vartheta^i \|^2-2\langle\vartheta^i,\vartheta^j\rangle+\| \vartheta^j \|^2=\delta^2\ ,$$

так как $\| \vartheta^i \|= z$, то получаем (2).

Теперь подсчитаем $\| \vartheta^1+\vartheta^2+\ldots+\vartheta^n \|$, используя ту же информацию. С учётом (5) имеем следующее

$$\| \vartheta^1+\vartheta^2+\ldots+\vartheta^n \|^2=\langle\vartheta^1,\vartheta^1\rangle+\langle\vartheta^2,\vartheta^2\rangle+\ldots+\langle\vartheta^n,\vartheta^n\rangle+$$

$$+2[\langle\vartheta^1,\vartheta^2\rangle+\langle\vartheta^2,\vartheta^3\rangle+\ldots+\langle\vartheta^{n-1},\vartheta^n\rangle]=nr^2+\frac{n(n-1)}{2}(2z^2-\delta^2)=$$

$$=n^2z^2-\frac{n(n-1)\delta^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\| \vartheta^1+\vartheta^2+\ldots+\vartheta^n \|=(n^2z^2-\frac{n(n-1)\delta^2}{2})^{1/2}\ . \tag{3}$$

Лемма 1. Элементы $\vartheta^1,\vartheta^2,\ldots,\vartheta^n\in A(x)$ являются линейно независимыми.

Доказательство. Пусть, наоборот, существуют числа $\lambda_i, i=1,\ldots,n$ такие что

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vartheta^i=0\ . \tag{4}$$

Умножая (4) на $2\vartheta^j$ с учётом (2), получаем следующую систему уравнений

$$(2z^2-\delta^2)\sum_{i\neq j}\lambda_i+2\lambda_j r^2=0, j=1,\ldots,n. \quad (5)$$

Нетрудно привести матрицу этой системы к диагональному виду. Это можно сделать, например, следующим образом.

Сначала надо вычесть первую строку из каждой строки матрицы системы (5), за исключением первой, а затем первый столбец сложить со всеми другими столбцами. Получим матрицу следующего вида

$$\begin{pmatrix} 2z^2+(n-1)(2z^2-\delta^2) & 2z^2-\delta^2 & \ldots & 2z^2-\delta^2 \\ 0 & \delta^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta^2 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы очевидно равен

$$(\delta^2)^{n-1}[2z^2+(n-1)(2z^2-\delta^2)]>0.$$

Отсюда $\lambda_i=0,\forall i=1,\ldots,n$, что и доказывает линейную независимость $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$.

Теперь проведём через точки $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$ касательные гиперплоскости к сфере $U(z)$:

$$H_i=\left\{x\in\mathbb{R}^n / \langle\vartheta^i,x\rangle=\langle\vartheta^i,\vartheta^i\rangle=z^2\right\}, i=1,\ldots,n.$$

Найдём точку x^0 пересечения этих гиперплоскостей. Очевидно, она удовлетворяет системе уравнений:

$$\langle\vartheta^i,x^0\rangle=z^2, i=1,\ldots,n. \quad (6)$$

В силу Леммы 2 такая точка x^0 существует и единственна. Обозначим $\rho=\| x^0 \|$ и покажем, что $\rho>z$. Действительно,

$$z^2=\langle y^i,x^0\rangle\leq\| \vartheta^i \|\times\| x^0 \|=z\rho.$$

Отсюда $z\leq\rho$. Если $z=\rho$, то тогда

$$\vartheta^i=\gamma_i x^0, \gamma_i\neq 0, i=1,\ldots,n.$$

Последнее противоречит линейной независимости векторов $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$. Итак

$$\rho>z. \quad (7)$$

Далее в силу линейной независимости $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$ существует единственная гиперплоскость H_0, проходящая через $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$:

$$H_0\triangleq H_0(\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle a,x\rangle=\alpha\right\}, a\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}. \quad (8)$$

При этом, поскольку $\vartheta^i\in H_0, i=1,\ldots,n$, мы имеем

$$\langle a,\vartheta^i\rangle=\alpha. \quad (9)$$

Далее, поскольку x^0 является решением системы (6), то

$$\langle\vartheta^i,x^0\rangle=z^2.$$

Отсюда, в силу линейной независимости $\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n$ вытекает, что

$$a = \frac{\alpha}{z^2} x^0 . \tag{10}$$

и уравнение для H_0 принимает вид

$$H_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \langle x^0, x \rangle = z^2 \right\}. \tag{11}$$

Далее нетрудно понять, что в гиперплоскости H_0 существует единственный элемент c, коллинеарный с вектором x^0, при этом

$$\| c \| < \rho .$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $x^0 \notin H_0$ в силу (7) и (11).

Лемма 2. На гиперплоскости H_0 существует единственная точка u, удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\| u - \vartheta^i \| = \| u - \vartheta^j \|, i, j = 1, \ldots, n . \tag{12}$$

При этом справедливо представление

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \vartheta^i . \tag{13}$$

Доказательство.

a) Прежде всего, ясно, что $u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \vartheta^i \in H_0$, поскольку в силу (6)

$$\langle x^0, u \rangle = u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \vartheta^i, x^0 \rangle = z^2 .$$

b) Далее, $\forall i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\| u - \vartheta^i \|^2 = \| u \|^2 - 2\langle u, \vartheta^i \rangle + \| \vartheta^i \|^2 = \| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \vartheta^j \|^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \vartheta^j, \vartheta^i \rangle + z^2 .$$

Отсюда с помощью формул (2) и (3) получаем

$$\| u - \vartheta^i \|^2 = \frac{1}{n^2} \left[n^2 z^2 - \frac{n(n-1)}{2} \delta^2 \right] + z^2 - \frac{2}{n} \left[\frac{(n-1)(2z^2 - \delta^2)}{2} + z^2 \right] =$$

$$= 2z^2 - \frac{n-1}{2n} \delta^2 - \frac{n-1}{n} (2z^2 - \delta^2) - \frac{2z^2}{n} .$$

Производя очевидные упрощения, окончательно заключаем

$$\| u - \vartheta^i \|^2 = \delta \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2}, i = 1, \ldots, n . \tag{14}$$

c) Теперь покажем единственность точки, для которой справедливы соотношения (12). Из равенств (12), возведённых в квадрат, сразу же вытекает

$$\beta = \langle u, \vartheta^i \rangle = \langle u, \vartheta^j \rangle, i, j = 1, \ldots, n .$$

Если $\beta \neq 0$, то это означает, что точка u, удовлетворяющая (12), является решением системы уравнений

$$\langle \vartheta^i, u \rangle = \beta, i = 1, \ldots, n .$$

В силу Леммы 1 эта система имеет единственное решение.

Условие же $\beta = 0$ означает, что u ортогонально линейно независимой системе векторов $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^n\}$, то есть $u = 0$. Последнее противоречит тому, что $u \in H_0$, поскольку $z > 0$.

Следствие 1. Справедливы равенства:

$$u = c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \vartheta^i .$$

Кроме того, точка c является решением следующих экстремальных задач:

$$\| x \| \to \min, x \in H_0 , \tag{15}$$

$$\| x - x^0 \| \to \min, x \in H_0 . \tag{16}$$

Очевидно, второе утверждение Следствия 1 вытекает из перпендикулярности решения z задач (15) и (16) к векторам $(x - z), \forall x \in H_0$.

Следствие 2. Числа ρ и δ связаны соотношением

$$\rho = \frac{z^2 \sqrt{2n}}{(2z^2 n - (n-1)\delta^2)^{1/2}} . \tag{17}$$

Доказательство. Прежде всего, поскольку $c = \gamma x^0 \in H_0$, имеем

$$\langle x^0, c \rangle = \gamma \rho^2 = z^2 ,$$

откуда $\gamma = z^2 / \rho$. Тогда $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\| c - \vartheta^i \|^2 = \| c \|^2 - \langle c, \vartheta^i \rangle + \| \vartheta^i \|^2 = \frac{z^4}{\rho^2} - 2\frac{z^4}{\rho^2} + z^2 = z^2 - \frac{z^4}{\rho^2} .$$

Отсюда с помощью равенств (14) и Следствия 1 заключаем, что имеет место равенство

$$z^2 - \frac{z^4}{\rho^2} = \delta^2 \left(\frac{n-1}{2n} \right).$$

Разрешая это уравнение относительно ρ, получаем (17).

Следствие 3. При $\delta = z\sqrt{2}$ из (17) следует

$$\rho = 2\sqrt{n} . \tag{18}$$

Далее, введём следующее обозначение

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y^i, x \rangle \le z^2, i = 1, \ldots, N; y^i \in A(z) \right\} . \tag{19}$$

Очевидно, что M – выпуклое замкнутое множество.

Теорема 1. Многогранник M ограничен.

Доказательство. Очевидно, что $0 \in M$. Покажем теперь, что если $\exists h \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$th \in M, \forall t > 0 , \tag{20}$$

то, непременно, $h = 0$.

Очевидно, что соотношение (20) возможно в том и только в том случае, когда

$$\langle y^i, h\rangle \le 0, \forall i = 1,\ldots,N. \tag{21}$$

Предположим, что для некоторого $k \in \{1,\ldots,N\}$ имеет место строгое неравенство

$$\langle y^k, h\rangle < 0.$$

Обозначим теперь $z = -y^k$. Тогда нетрудно увидеть, что

$$z \in U(z) = \{x \in \mathbb{R}^n / \| x \| = z\}$$

и $\langle z, h\rangle > 0$. Поскольку $h \neq 0$, то можно считать, что $h \in U(z)$.

По определению δ-сети существуют n линейно независимых элементов $\vartheta^1, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^n \in A(z)$ таких, что

$$z \in clB(\vartheta^i, \delta), \| \vartheta^i \| = z, i = 1,\ldots,n.$$

Покажем, что элемент $z \in cone\{\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n\}$. Другими словами, что

$$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vartheta^i, \tag{23}$$

$$\alpha_i \ge 0, i = 1,\ldots,n; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0. \tag{24}$$

Поскольку $\{\vartheta^1,\ldots,\vartheta^n\}$ – линейно независимая система, то представление (23) имеет место. Далее, из неравенства $\| z - \vartheta^i \| \le \delta$ следует, что

$$\langle z, \vartheta^i\rangle \ge \frac{2z^2 - \delta^2}{2} \ge 0, i = 1,\ldots,n.$$

Значит, $\alpha_i \ge 0, \forall i = 1,\ldots,n$. Второе неравенство в (24) выполнено, поскольку $z \neq 0$.

А теперь, принимая во внимание (22), получаем:

$$0 < \langle z, h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \vartheta^i, h\rangle.$$

Отсюда следует, что $\exists p \in \{1,\ldots,n\}$

$$\langle \vartheta^p, h\rangle > 0. \tag{25}$$

Это означает, что $h \notin M$. Итак, (25) не может иметь места и потому

$$\langle y^i, h\rangle = 0, \forall i = 1,\ldots,N.$$

Из последних равенств заключаем, что $h = 0$, поскольку среди элементов сети $A(z)$ существует система из n линейно независимых векторов. Итак, теорема полностью доказана.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, какую сеть необходимо построить для того, чтобы утверждать, является ли данная точка ε-решением задачи (1) или нет.

2. Нахождение ε -решения

Теорема 2. Пусть

$$f(x) = \| x \|^2, f(z) = z^2, z \in Argloc \max(f, \mathbb{D})$$

и число ρ определено формулой (17). Тогда, если существует такая точка $u \in \mathbb{D}$, что $f(u) > \rho^2$, то существует элемент $y^j \in A(z)$, для которого

$$\langle f'(y^j), u - y^j \rangle > 0 . \quad (26)$$

Доказательство. Выше было показано, что многогранник *M*, определённый в (19), является ограниченным, причем,

$$\| x \| \le \rho \quad \forall x \in M . \quad (27)$$

По условию $\exists u \in \mathbb{D} : \| u \| > \rho$. Значит, $u \notin M$. Поэтому $\exists j \in \{1, \ldots N\}$:

$$\langle y^j, x \rangle > z^2 = \langle y^j, y^j \rangle ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. Если $\mathbb{D} \subset M$, то $\sup(f, \mathbb{D}) \le \rho^2$.

Следствие 5. $\forall \varepsilon > 0$ всегда найдётся $\delta > 0$, при котором соответствующая δ -сеть гарантирует нахождение ε -решения, то есть

$$\sup(f, \mathbb{D}) \le f(z_\varepsilon) + \varepsilon .$$

Доказательство. Достаточно найти такое ρ, при котором

$$0 < \rho - z < \varepsilon .$$

Используя (17), приходим к следующему выражению для δ:

$$\delta^2 < \frac{2nr^2}{(n-1)} \left(\frac{(z+\varepsilon)^2 - z^2}{(z+\varepsilon)^2} \right). \quad (28)$$

Итак, в случае произвольного допустимого множества $\mathbb{D}$ можно построить δ -сеть ($\delta = \delta(z), z^2 = f(z)$), которая будет «достаточна» для того, чтобы утверждать, что либо z является ε -решением задачи (1), либо можно указать точку y_j, в которой справедливо (26) (то есть нарушено условие оптимальности [8]).

Литература

1. Bulatov V.P. (1977), The Embedding Methods in Extremum Problems, Nauka, Novosibirsk.

2. Enkhbat R. (1990), Algorithms for Global Maximization of Convex Functions over Sets with a Special Structure, PhD thesis, Irkutsk State University, Irkutsk, Russia.

3. Horst R. (1986), A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 51, pp.271-291.

4. Horst R. (1987), Outer Cut Methods in Global Optimization, Springer - Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 304, pp.28-40.

5. Horst R. (1987), A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems, Springer - Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 41, pp.330-337.

6. Horst R. and Tuy H. (1990), Global Optimization (Deterministic Approaches), Springer, Berlin.

7. Strekalovsky A.S. and Enkhbat R. (1990), Global Maximum of Convex Functions on Arbitrary Sets, Dep.in VINITI, No. 1063, Irkutsk State University.

8. Strekalovsky A.S. (1987), On the Global Extremum Problem, Soviet Math.Doklady, 292(5), pp.1062-1066.

9. Tuy H. (1964), Concave Programming under Linear Constraints, Soviet Math.Doklady, 159(1), pp.32-35.

References

1. Bulatov V.P. (1977), The Embedding Methods in Extremum Problems, Nauka, Novosibirsk.

2. Enkhbat R. (1990), Algorithms for Global Maximization of Convex Functions over Sets with a Special Structure, PhD thesis, Irkutsk State University, Irkutsk, Russia.

3. Horst R. (1986), A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization, Journal of Optimization Theory and Applications, 51, pp.271-291.

4. Horst R. (1987), Outer Cut Methods in Global Optimization, Springer - Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 304, pp.28-40.

5. Horst R. (1987), A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems, Springer - Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 41, pp.330-337.

6. Horst R. and Tuy H. (1990), Global Optimization (Deterministic Approaches), Springer, Berlin.

7. Strekalovsky A.S. and Enkhbat R.(1990), Global Maximum of Convex Functions on Arbitrary Sets, Dep.in VINITI, No. 1063, Irkutsk State University.

8. Strekalovsky A.S. (1987), On the Global Extremum Problem, Soviet Math.Doklady, 292(5), pp.1062-1066.

9. Tuy H. (1964), Concave Programming under Linear Constraints, Soviet Math.Doklady, 159(1), pp.32-35.

Энхбат Р., профессор, директор Института математики Монгольского государственного университета, e-mail:enkhbat46@yahoo.com.

Барысбек Б., Монгольский Государственный Университет, Институт Математики, e-mail: barysbekb@outlook.com.

Enkhbat R., DSc, head of Institute of Mathematics, Mongolian State University, e-mail:enkhbat46@yahoo.com.

Barysbek B., Mongolian State University, Institute of Mathematics, e-mail: barysbekb@outlook.com.